В. А. ЗОРИЧ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛЕЖАНДРА

(Материал к лекциям по анализу первого семестра)

Содержание

Начальное определение преобразования Лежандра и общее неравенство Юнга.

Преобразованием Лежандра функции f переменной x называется новая функция f^* новой переменной x^*, определяемая соотношением

$$f^*(x^*) := \sup_x (x^* x - f(x)), \tag{1}$$

где верхняя грань берется по переменной x при фиксированном значении x^*.

Упражнения.

1. Проверьте, что функция f^* выпукла на своей области определения.
2. Нарисуйте график функции f, прямую $x^* x$ и укажите геометрический смысл величины $f^*(x^*)$.
3. Найдите $f^*(x^*)$, когда $f(x) = |x|$ и когда $f(x) = x^2$.
4. Заметьте, что из (1), очевидно, следует, что

$$x^* x \le f^*(x^*) + f(x) \tag{2}$$

при любых значениях аргументов x^*, x из областей определения функций f^* и f соответственно. Соотношение (2) обычно называется *общим неравенством Юнга* или *неравенством Юнга-Фенхеля*, а функцию f^*, например, в выпуклом анализе часто называют *двойственной по Юнгу* к функции f.

Конкретизация определения в случае выпуклых функций.

Если бы верхняя грань, фигурирующая в определении (1), достигалась в некоторой внутренней точке x области определения функции f, а сама эта функция была бы гладкой (или по крайней мере дифференцируемой), то мы нашли бы, что

$$x^* = f'(x) \tag{3}$$

и при этом

$$f^*(x^*) = x^* x - f(x) = x f'(x) - f(x). \tag{4}$$

Тем самым в этом случае преобразование Лежандра конкретизируется в виде равенств (3),(4), из которых первое дает аргумент x^*, а второе — значение $f^*(x^*)$ функции f^* — преобразования Лежандра функции f. (Заметим, что оператор $xf'(x) - f(x)$ встречался уже у Эйлера.)

Если функция f к тому же еще и выпукла, то,

во-первых, условие (3) выделит не просто локальный экстремум, а локальный максимум (проверьте!), который в этом случае, очевидно, будет и абсолютным максимумом;

во-вторых, ввиду монотонного возрастания производной строго выпуклой функции, уравнение (3), для такой функции однозначно разрешимо относительно x.

Если уравнение (3) допускает явное решение $x = x(x^*)$, то, подставляя его в (4), получим явное выражение $f^*(x^*)$.

Упражнения.

1. Найдите преобразование Лежандра функции $\frac{1}{\alpha}x^\alpha$ при $\alpha > 1$ и получите классическое неравенство Юнга

$$ab \le \frac{1}{\alpha}a^\alpha + \frac{1}{\beta}b^\beta, \tag{5}$$

где $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

2. Какова область определения преобразования Лежандра гладкой строго выпуклой функции f, имеющей асимптотами прямые ax и bx при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$ соответственно?

3. Найдите преобразование Лежандра функции e^x и докажите неравенство

$$xt \le e^x + t\ln\frac{t}{e}\ . \tag{6}$$

Инволютивность преобразования Лежандра выпуклой функции.

Как уже было отмечено, соотношение (2) или эквивалентное ему неравенство

$$f(x) \ge xx^* - f^*(x^*) \tag{7}$$

выполнено при любых значениях аргументов x, x^* из областей определения функций f и f^* соответственно.

Вместе с тем, как показывают формулы (3), (4), если x и x^* связаны соотношением (3), то последнее неравенство (7) обращается в равенство, по крайней мере в случае гладкой строго выпуклой функции f. Вспоминая определение (1) преобразования Лежандра, заключаем, что в этом случае

$$(f^*)^* = f. \tag{8}$$

Итак, преобразование Лежандра гладкой строго выпуклой функции *инволютивно*, т.е. повторное его применение приводит к исходной функции.

Упражнения.

1. Верно ли, что $f^{**} = f$ для любой гладкой функции f?

2. Верно ли, что $f^{***} = f^*$ для любой гладкой функции f ?

3. Дифференцируя соотношение (4), с учетом (3) и при условии, что $f''(x) \neq 0$, покажите, что $x = f^*(x^*)$ и, следовательно, $f(x) = xx^* - f^*(x^*)$ (инволютивность).

4. Проверьте, что в соответствующих точках x, x^*, связанных равенством (3), $f''(x) = 1/(f^*)''(x^*)$ и $f^{(3)}(x) = -(f^*)^{(3)}(x^*)/((f^*)'')^2(x^*)$.

5. Семейство прямых $px + p^4$, зависящих от параметра p, является семейством касательных к некоторой кривой (*огибающей* этого семейства). Найдите уравнение этой кривой.

Заключительные замечания и комментарий.

В рамках разговора о выпуклых функциях мы дали начальные представления о преобразовании Лежандра на уровне функций одной переменной. Однако уже они облегчат восприятие этого преобразования и работу с ним в ряде важных более общих случаях применения преобразования Лежандра в теоретической механике, термодинамике, уравнениях математической физики, вариационном исчислении, выпуклом анализе, контактной геометрии,... с которыми многим еще предстоит иметь дело.

Там будут проанализированы различные детали и возможные развития самого понятия преобразования Лежандра. Здесь же добавим только следующее. Как показывает равенство (3) аргументом преобразования Лежандра является производная или, равносильно тому, дифференциал исходной функции.

Если бы аргумент x был, например, вектором линейного пространства X со скалярным произведением $<,>$, то обобщением определения (1), естественно, было бы соотношение

$$f^*(x^*) := \sup_x (< x^*, x > - f(x)). \tag{9}$$

Если под x^* вообще понимать линейную функцию на пространстве X, т.е. считать, что x^* — элемент двойственного X пространства X^* и действие x^* на вектор x, т.е. $x^*(x)$, по-прежнему обозначать через $< x^*, x >$, то определение (9) сохранится и будет совсем ясно, что если функция f была определена на области пространства X, то ее преобразование Лежандра f^* оказывается определенным в области пространства X^*, двойственного пространству X.